ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a > 0$ සහිතව $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ.

$f(x)$ හි අවම අගය $-\dfrac{\Delta}{4a}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\Delta = b^2 - 4ac$ වේ.

p හා q යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $r \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු. තවද, $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x) = px^2 + 2\sqrt{pq}\,x + qr$ යැයි ද ගනිමු.

$g(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල නොමැති බව දී ඇත. $r > 1$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, $g(x)$ හි අවම අගය q බව දී ඇත. $r = 2$ බව පෙන්වන්න.

$y = x + 1$ සරල රේඛාව $r = 2$ වන $y = g(x)$ වක්‍රයට $(0, 1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වූ ස්පර්ශ රේඛාව නම්, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද, $p(x)$ යනු මාත්‍රය 4 වූ බහුපදයක් යැයි ද ගනිමු. $(x - a)$ යන්න $p(x)$ හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් නම්, $(x - a)^2$ යන්න $p(x)$ හි සාධකයක් වන බව පෙන්වන්න; මෙහි $p'(x)$ යනු $p(x)$ හි x විෂයයෙන් ව්‍යුත්පන්නය වේ.

$x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$ යැයි ගනිමු. $(x - 2)^2$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

$f(-1)$ හි අගය සොයා, $f(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

12. (*a*) පිරිමි 8 දෙනෙකුගෙන් හා ගැහැනු 6 දෙනෙකුගෙන් යුත් කණ්ඩායමකින් පිරිමි 4 දෙනෙකුගෙන් හා ගැහැනු 4 දෙනෙකුගෙන් සමන්විත කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත.

(i) කමිටුව තෝරා ගත හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(ii) එබඳු කමිටුවක් තෝරා ගත්තේ යැයි සිතමු. කිසිම ගැහැනුන් දෙදෙනෙකු එකළඟ වාඩි විය නොහැකි නම්, එම කමිටු සාමාජිකයන් පේළියකට වාඩි විය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$ බව දී ඇත.

සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_n = n(n+1)(n+2)$ බව පෙන්වන්න.

සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r = \frac{1}{U_r}$ යැයි ගනිමු.

සියලු $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r = \frac{A}{r(r+1)} + \frac{B}{(r+1)(r+2)}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියත සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} V_r = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව තවදුරටත් පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\sum_{r=m}^{\infty} V_r = \frac{1}{24}$ වන පරිදි $m \in \mathbb{Z}^+$ සොයන්න.

13. (*a*) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $\mathbf{A}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වා, $\mathbf{A}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ a හි අගය සොයන්න.

(ii) $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ වන පරිදි වූ $\mathbf{C}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ හා z හි මාපාංකය $|z|$ අර්ථ දක්වන්න.

$|z| = 1$ නම්, $\bar{z} = \frac{1}{z}$ බව පෙන්වා, ඕනෑම $w \in \mathbb{C}$ සඳහා $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

දැන්, $z = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ යැයි ගනිමු. $|z|$ හා $\operatorname{Arg} z$ සොයන්න.

$|w| < 1$ හා $\operatorname{Arg} w = \alpha$ වන පරිදි $w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ වේ.

එබඳු එක් w සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගනිමින්, $1, z, w$ හා $\bar{z}w$ නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක ලකුණු කර $|z - w| = |1 - \bar{z}w|$ වන්නේ ඇයි දැයි ජ්‍යාමිතිකව පැහැදිලි කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\dfrac{\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)^n}{\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)^7}$ හි තාත්ත්වික කොටස $\frac{1}{2}$ වන පරිදි වූ n හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

14. (*a*) $a, p, q \in \mathbb{R}$ හා $p < q$ යැයි ගනිමු.

$x \in \mathbb{R} - \{p, q\}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{(ax+1)(x+2)}{(x-p)(x-q)}$ යැයි ගනිමු.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ $x = 1$ හා $x = -4$ බව දී ඇත. p හා q හි අගයන් ලියා දක්වන්න.

$y = 1$ යන්න $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛයක් බව දී ඇති විට, $a = 1$ බව පෙන්වන්න.

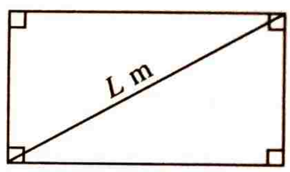
a, p හා q හි මෙම අගයන් සඳහා $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$g(x) = f(x) + 1$ යැයි ගනිමු.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$g(x)$ හි පරාසය ලියා දක්වන්න.

(*b*) වර්ගඵලය k m^2 වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර පෙදෙසක විකර්ණයක් දිගේ වැටක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත. සෘජුකෝණාස්‍රයේ දිග x m යැයි ගනිමු (රූපය බලන්න). වැටෙහි දිග L m යන්න $L^2 = x^2 + \dfrac{k^2}{x^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, L අවම වන්නේ $x = \sqrt{k}$ වන විට බව පෙන්වන්න.



15. (*a*) $k \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-k)}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x\sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$ ට කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ

$\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x\{2\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\}\,\mathrm{d}x = e^{\pi}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $k > 0$ යැයි ගනිමු. $x > 0$ සඳහා $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\left(k\sqrt{x}-1\right)e^{k\sqrt{x}}\right\} = \dfrac{k^2}{2}e^{k\sqrt{x}}$ බව පෙන්වන්න.

$I_k = \displaystyle\int_1^4 e^{k\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ යැයි ද ගනිමු. $I_k = \dfrac{2}{k^2}\left\{(2k-1)e^{2k} - (k-1)e^{k}\right\}$ බව පෙන්වන්න.

S යනු $y = e^{\sqrt{x}}$, $x = 1$, $x = 4$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස යැයි ගනිමු.

S හි වර්ගඵලය $2e^2$ බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස x-අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුවේ පරිමාව ද සොයන්න.

16. $m \in \mathbb{R}$ යැයි ද, l යනු m අනුක්‍රමණය ලෙස ඇතිව $A \equiv (3, 1)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන රේඛාව යැයි ද සිතමු.

l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

A හරහා $S_1 \equiv 5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y + 6 = 0$ වෘත්තයට ස්පර්ශක දෙකක් පවතින බව පෙන්වා, ඒවා අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

B හා D යනු මෙම ස්පර්ශක $S_1 = 0$ වෘත්තය ස්පර්ශ කරන ලක්ෂ්‍ය යැයි ද, C යනු $S_1 = 0$ හි කේන්ද්‍රය යැයි ද ගනිමු.

$ABCD$ යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වා A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

BD ස්පර්ශ ජ්‍යායෙහි සමීකරණය සොයා, B හා D හරහා යන $S_1 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

17. (*a*) $\theta \in \mathbb{R}$ සඳහා $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2 x - 1 = \sin^2 x + 3\cos x$ සමීකරණය තෘප්ත කරන $[0, 2\pi)$ ප්‍රාන්තරය තුළ වූ සියලුම x හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $A + B + C = \pi$ යන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$ හා $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$ හා $1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{3\pi}{4}$ විසඳන්න.

* * *

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය	II
இணைந்த கணிதம்	II
Combined Mathematics	II

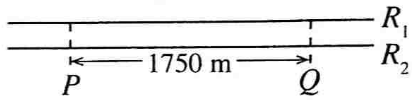
10 S II

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

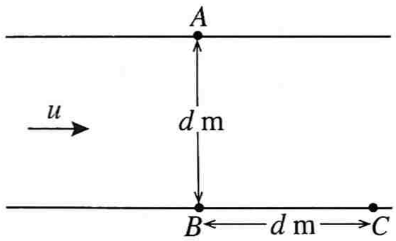
(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (*a*) එකිනෙක අතර දුර 1750 m වූ P හා Q දුම්රිය ස්ථාන දෙකක් අතර දිවෙන R_1 හා R_2 යනු සෘජු සමාන්තර දුම්රිය මාර්ග දෙකකි. $t = 0$ හිදී P දුම්රිය ස්ථානයෙන් නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කරන A දුම්රියක් $10\ \text{m s}^{-2}$ ක ඒකාකාර ත්වරණයකින් R_1 දුම්රිය මාර්ගය දිගේ තත්පර T කාලයක් ගමන් කර, $t = T$ s හිදී එය ලබාගන්නා වේගය තත්පර 30 ක කාලයක් පවත්වා ගනී. ඉන්පසුව, එය තත්පර T කාලයක් ඒකාකාරව මන්දනය වී Q දුම්රිය ස්ථානයේදී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. P සිට Q දක්වා A දුම්රියේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ ගමනට ගතවූ මුළු කාලය 40 s බව පෙන්වන්න.



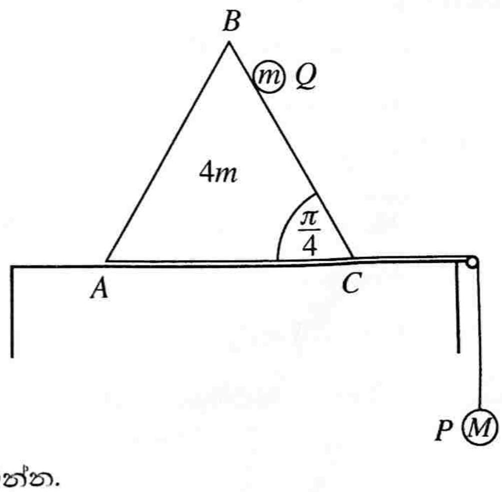
$\overrightarrow{PQ}$ දිශාවට $40\ \text{m s}^{-1}$ ක නියත වේගයකින් R_2 දුම්රිය මාර්ගය දිගේ ගමන් කරන තවත් B දුම්රියක් $t = 0$ හිදී P දුම්රිය ස්ථානය පසු කරයි. $t = 0$ සිට $t = 40$ s දක්වා B දුම්රියට සාපේක්ෂව A දුම්රියේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සෘජු සමාන්තර ඉවුරු දෙකක් අතරින්, d m පළල ගඟක් $u\ \text{m s}^{-1}$ ඒකාකාර වේගයකින් ගලා බසී. ජලයට සාපේක්ෂව $\sqrt{2}u\ \text{m s}^{-1}$ වේගයක් ඇති P නම් පිහිනුම්කරුවෙක් එක් ඉවුරක වූ A ලක්ෂ්‍යයකින් ආරම්භ කර, අනිත් ඉවුරේ A ට කෙලින්ම ප්‍රතිවිරුද්ධව ඇති B ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට පිහිනයි. P පිහිනුම්කරු ට B කරා ළඟා වීමට ගතවන කාලය $\dfrac{d}{u}$ s බව පෙන්වන්න.



ජලයට සාපේක්ෂව $2\sqrt{2}u\ \text{m s}^{-1}$ වේගයක් ඇති Q නම් දෙවන පිහිනුම්කරුවෙක්, B සිට d m දුරක් ගඟ පහළින් එම ඉවුරේම වූ C ලක්ෂ්‍යයකින් ආරම්භ කර, P පිහිනුම්කරු මුණගැසෙන අරමුණින් පිහිනයි. (රූපය බලන්න.) P හා Q පිහිනුම්කරුවන් එකම මොහොතේ පිහිනීම ආරම්භ කරන බව උපකල්පනය කර, P පිහිනුම්කරු B ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට පෙර Q පිහිනුම්කරු P පිහිනුම්කරු හමුවන බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) ස්කන්ධය $4m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ ABC සිරස් හරස්කඩ රූපයේ දැක්වේ. AC අයත් මුහුණත සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. තවද, AB හා BC ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $A\hat{C}B = \dfrac{\pi}{4}$ වේ. කුඤ්ඤයෙහි C ලක්ෂ්‍යය හා ස්කන්ධය M වූ P අංශුවක්, මේසයෙහි දාරයකට සවි කළ කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක අන්තවලට ඈඳා ඇත. තන්තුව, ABC අඩංගු සිරස් තලයේම පිහිටයි. ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක් BC මත අල්වා තබා ඇත. P අංශුව නිදහසේ එල්ලෙයි. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය, නිශ්චලතාවයේ සිට මෙම පිහිටුමෙන් මුදාහරිනු ලැබේ.

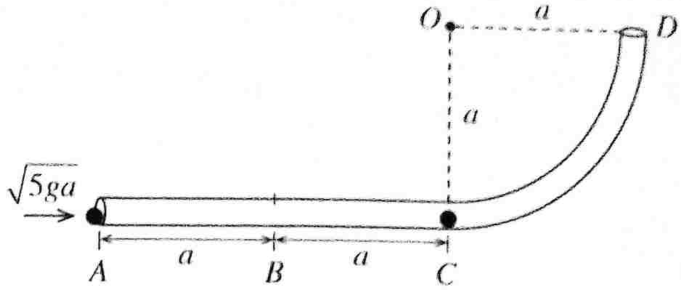


$m < 2M$ නම්, P අංශුව සිරස්ව පහළට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

$m = 2M$ නම්, එක් එක් අංශුවෙහි හා කුඤ්ඤයෙහි චලිත විස්තර කරන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $ABCD$ සිහින් බටයක් ABC තිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සවි කර ඇත. AB හා BC කොටස් එක එකක දිග a වන අතර CD කොටස අරය a හා කේන්ද්‍රය O වන OC සිරස්ව ඇති වෘත්තයකින් හතරෙන් එකකි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් බටය තුළ C ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ තවත් Q අංශුවක් බටය තුළ A ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, එයට $\overrightarrow{AB}$ හි දිශාවට $\sqrt{5ga}$ විශාලත්වයක් ඇති ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

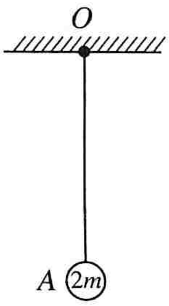


Q අංශුව හා AB කොටස අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ ක් වන අතර BCD කොටස සුමට වේ.

Q අංශුව බටය තුළ චලනය වී P අංශුව සමග ගැටී හා වේ. මෙම R සංයුක්ත අංශුව චලිතය ආරම්භ කරන ප්‍රවේගය සොයන්න.

යටිඅත් සිරස සමග θ කෝණයකින් $\overrightarrow{OR}$ හැරුන විට, R අංශුවෙහි වේගය v යන්න $v^2 = ga(2\cos\theta - 1)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, R අංශුව, බටය තුළ ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත්වන මොහොතෙහිදී එය මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

13. එක එකක ස්කන්ධය m වූ අංශු දෙකක් එකට ඇලවීමෙන් ස්කන්ධය $2m$ වූ P සංයුක්ත අංශුවක් සාදා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය $2mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් අන්තයක් තිරස් සිවිලිමක වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් අන්තය, P සංයුක්ත අංශුවට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයකදී සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. මෙම සමතුලිත පිහිටුමේදී තන්තුවේ විතතිය සොයන්න.



P අංශුව A සිට $\frac{a}{2}$ දුරක් පහළට ඇද මුදාහැරියේ නම්, P හි චලිත සමීකරණය $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$ සඳහා $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ ද $AP = x$ ද වේ.

දැන්, P අංශුව, A සිට l දුරක් පහළට ඇද මුදාහරිනු ලැබේ.

P අංශුව, පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතයක යෙදීම සඳහා l හි උපරිම අගය කුමක් ද?

P අංශුව, $\sqrt{ag}$ වේගයකින් O ලක්ෂ්‍යයෙහි වැදීම සඳහා l හි අගය සොයන්න.

P අංශුව, මෙම වේගයෙන් O හි වදින විට ස්කන්ධය m වූ එක් අංශුවක් ගැලවී යයි. සිවිලිම අප්‍රත්‍යාස්ථ වේ.

ඉතිරි අංශුව, එහි ගුරුත්වය යටතේ චලිතයෙන් අනතුරුව යෙදෙන නව සරල අනුවර්තී චලිතය සඳහා චලිත සමීකරණය ලබාගන්න.

මෙම තනි අංශුවට, ප්‍රථමවරට ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත්වීම සඳහා O සිට ගතවන කාලය සොයන්න.

14. (*a*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හතරක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$ හා $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ වේ; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

AB හා DC රේඛා, සමාන්තර වේ. $\alpha = 8$ බව පෙන්වන්න.

AC හා BD රේඛා පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{e}$ වූ E ලක්ෂ්‍යයේදී ඡේදනය වේ.

$\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{AC}$ සැලකීමෙන්, $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $\mathbf{e} = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$ බව පෙන්වන්න.

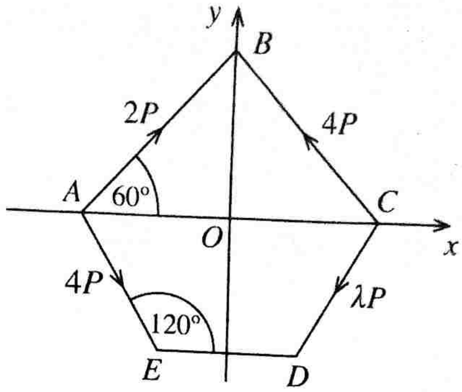
මෙලෙසම, $\mu \in \mathbb{R}$ සඳහා $\mathbf{e} = (1-\mu)\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$ බව ද පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් $\mathbf{e}$ සොයන්න.

$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED}$ සැලකීමෙන් $A\hat{E}D$ සොයන්න.

[නවවැනි පිටුව බලන්න.

(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCDE$ පංචාස්‍රය y-අක්ෂය වටා සමමිතික වේ. A හා C ශීර්ෂ x-අක්ෂය මත ද B ශීර්ෂය y-අක්ෂය මත ද පිහිටයි. තව ද, $AC = 4a$, $DE = 2a$, $A\hat{E}D = 120^\circ$ හා $O\hat{A}B = 60^\circ$ ද වේ; මෙහි O යනු මූලය වේ.

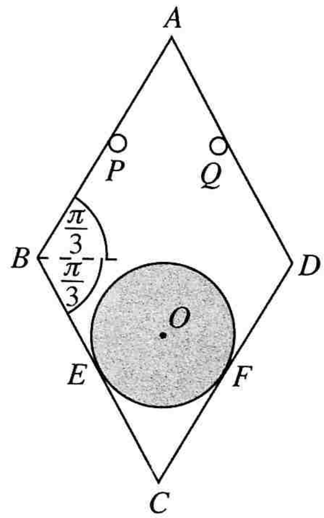


විශාලත්ව $2P, 4P, \lambda P$ හා $4P$ වන බල හතරක් පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ හා $\overrightarrow{AE}$ දිගේ ක්‍රියාකරයි; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. මෙම බල පද්ධතිය O හරහා ක්‍රියාකරන $\mathbf{R}$ තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව දී ඇත. λ හි අගය ද, $\mathbf{R}$ හි විශාලත්වය හා දිශාව ද සොයන්න.

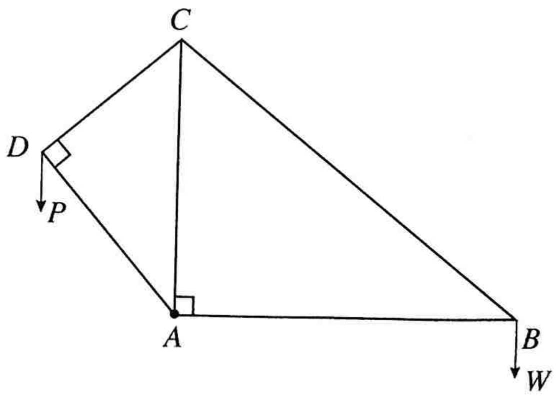
දැන්, විශාලත්වය $2P$ වූ $\overrightarrow{DE}$ දිගේ ක්‍රියාකරන බලයක් හා වාමාවර්ත අතට ක්‍රියාකරන $4\sqrt{3}Pa$ ඝූර්ණයක් සහිත යුග්මයක් ඉහත පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය ඌනනය වන තනි බලයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

15. (a) $2a$ සමාන දිගින් හා W සමාන බරින් යුත් AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් A, B, C හා D ලක්ෂ්‍යවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. කේන්ද්‍රය O ද අරය $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ද බර W ද වන සුමට ඒකාකාර තුනී වෘත්තාකාර තැටියක් BC හා CD දඬු පිළිවෙළින් E හා F හිදී ස්පර්ශ කරමින් $ABCD$ රාමුව ඇතුළත තබා ඇත.

රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, රාමුවෙන් හා තැටියෙන් සමන්විත පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ ඇත්තේ එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි P හා Q අචල සුමට නාදැති දෙකක් මගිනි. $A\hat{B}C = \frac{2\pi}{3}$, $CE = CF = a$ හා AOC රේඛාව සිරස් බව දී ඇත. CD මගින් BC මත C සන්ධියේදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ බව පෙන්වා නාදැති දෙක අතර දුර සොයන්න.



(b) රූපයේ පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල, අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කළ AB, BC, CD, DA හා AC සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. $AC = 2a$, $B\hat{A}C = 90^\circ$, $C\hat{D}A = 90^\circ$, $A\hat{B}C = 30^\circ$ හා $C\hat{A}D = 30^\circ$ බව දී ඇත. B සන්ධියෙහි W භාරයක් එල්ලා රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව අසවු කර AC සිරස්ව ඇතිව පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ එයට D සන්ධියෙහිදී සිරස්ව පහළට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



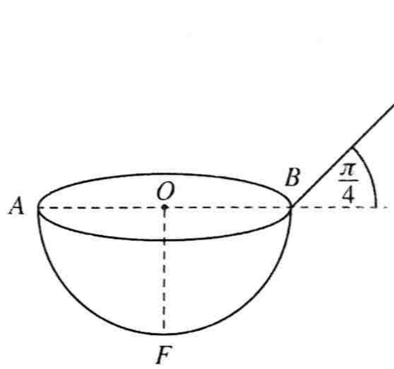
(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් B, C හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

16. (i) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද

(ii) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් ද

පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, අරය $\sqrt{2}a$ වූ අර්ධ වෘත්තාකාර CDE කොටසකින් හා දිග $2\sqrt{2}a$ වූ BC සෘජු කොටසකින් සමන්විත සිහින් ඒකාකාර $BCDE$ කම්බියකින් සෑදි මිටක්, කේන්ද්‍රය O හා අරය $2a$ වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලකට දෘඪ ලෙස සවි කර හැන්දක් සාදා ඇත. CE විෂ්කම්භය BC ට ලම්බ වේ. A හා B ලක්ෂ්‍ය අර්ධ ගෝලාකාර කබොලෙහි වෘත්තාකාර ගැට්ටේ විෂ්කම්භයක අන්ත වන අතර F ලක්ෂ්‍යය අර්ධ ගෝලාකාර කබොලෙහි පෘෂ්ඨය මත පිහිටා ඇත්තේ OF හා OB ලම්බ වන පරිදි ය. $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{BC}$ අතර කෝණය $\frac{\pi}{4}$ ක් වන අතර O, A, B, C, D, E හා F ලක්ෂ්‍ය එකම තලයක පිහිටයි. අර්ධ ගෝලාකාර කබොලෙහි ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද මිටෙහි ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\sqrt{2}a\sigma$ ද වේ. හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OB ට පහළින් $\left(\frac{3\pi-4}{2+5\pi}\right)a$ දුරකින් ද OF සිට $\left(\frac{8+5\pi}{2+5\pi}\right)a$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

දැන්, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත්තේ OF සිරස්ව ඇතිව F ලක්ෂ්‍යය තිරස් ගෙබිමක් ස්පර්ශ කරමින් හැන්ද සමතුලිතතාවේ තැබිය හැකිවන පරිදි ය. a හා σ ඇසුරෙන් m සොයන්න.

17. (*a*) A හා B සර්වසම මලු දෙකකි. A මල්ලෙහි කළු පාට බෝල 3 ක් හා සුදු පාට බෝල 2 ක් අඩංගු වන අතර B මල්ලෙහි කළු පාට බෝල 4 ක් හා සුදු පාට බෝල 3 ක් අඩංගු වේ. බෝල, ඒවා පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම වේ. දැන්, මුහුණත්වල $1, 2, 3, 4, 5$ හා 6 අංක යොදා ඇති පැති හයකින් යුත් නොනැඹුරු දාදු කැට දෙකක් එකට පෙරලනු ලැබේ. එවිට ලැබෙන සංඛ්‍යාවල එකතුව ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් නම් A මල්ල ද, නොඑසේ නම් B මල්ල ද තෝරාගනු ලැබේ. තෝරාගත් මල්ලෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් බව දී ඇති විට, මෙම බෝලය A මල්ලෙන් ඉවතට ගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) සිසුන් 100 දෙනෙකුට කිසියම් කාර්යයක් නිම කිරීම සඳහා ගත් කාලයන් පහත වගුවේ සාරාංශගත කර ඇත:

ගත් කාලය (තත්පර)	සිසුන් ගණන
0 – 10	10
10 – 20	20
20 – 30	35
30 – 40	20
40 – 50	15

ඉහත දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය, මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව නිමානය කරන්න.

පසුව, තවත් සිසුන් 25 දෙනෙකුට එම කාර්යයම දෙන ලදි. මෙම සිසුන් ඉහත වගුවේ එක් එක් කාල ප්‍රාන්තරයට 5 දෙනෙකු බැගින් වැටුණි.

නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය නිමානය කරන්න.

* * *